Matheus Bohrer

Autovalores em Variedades Riemannianas Completas

Porto Alegre, Brasil.

Agosto de 2017

Matheus Bohrer

Autovalores em Variedades Riemannianas Completas

Dissertação submetida por Matheus Bohrer como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Leonardo Prange Bonorino

Porto Alegre, Brasil.

Agosto de 2017

Matheus Bohrer
Autovalores em Variedades Riemannianas Completas/ Matheus Bohrer. – Porto Alegre, Brasil., Agosto de 2017-
37 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Leonardo Prange Bonorino

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Agosto de 2017.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Matheus Bohrer

Autovalores em Variedades Riemannianas Completas

Dissertação submetida por Matheus Bohrer como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Trabalho aprovado. Porto Alegre, Brasil., 24 de novembro de 2012:

Leonardo Prange Bonorino
Orientador

Diego Marcon Farias
UFRGS

Lucas da Silva Oliveira
UFRGS

Miriam Telichevesky
UFRGS

José Afonso Barrionuevo
UFRGS

Porto Alegre, Brasil.
Agosto de 2017

Este trabalho é dedicado aos professores Adriana Neumann, Artur Lopes, L.F. Rocha e L.G. Mendes.

Agradecimentos

Pelos anos, ao Otávio.

Pelo suporte, ao Marcelo, ao Horta, ao Longa, ao Fabio, à Luísa e à Carol.

Por me ensinar análise, ao Leonardo.

Pela paciência, ao Brietzke.

Pela cumplicidade, à Laura.

"I have now learned that precision and details are frequently necessary in mathematics,
but I am still very fond of promenades".
(É. Ghys, A singular mathematical promenade)

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar o problema de autovalor de Dirichlet para variedades riemannianas completas.

Mais precisamente, pretendemos estudar uma cota por baixo para o k-ésimo autovalor de um domínio limitado em uma variedade riemanniana completa. Tal cota é obtida fazendo-se uso de uma fórmula de recorrência de Cheng e Yang e um teorema de Nash. Ademais, pretendemos estudar uma desigualdade universal para os autovalores no espaço hiperbólico.

Palavras-chaves: problema de Dirichlet. problema do autovalor. desigualdade de Yang.

Abstract

The goal of this dissertation is to study the Dirichlet eigenvalue problem for a complete riemannian manifold.

More accurately, we intend to investigate a lower-bound for the *k-th* eigenvalue on a bounded domain in a complete riemannian manifold. Such a bound is obtained by making use of a recursion formula of Cheng and Yang and Nash's Theorem. Furthermore, we study a universal inequality for eigenvalues of the Dirichlet eigenvalue problem on a bounded domain in a hyperbolic space $H^n(-1)$.

Key-words: Dirichlet problem. eigenvalue problem. Yang-type inequality.

Introdução

Seja M uma variedade riemanniana completa n-dimensional. Para um domínio $\Omega \subseteq M$ limitado, consideramos o problema do autovalor com condição de Dirichlet - doravante *problema da membrana vibrante.*

Problema da Membrana Vibrante *Dada uma variedade riemanniana M compacta, encontrar todos os números reais λ para os quais o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

admite solução não-trivial $u \in C^2(M)$.

Em particular, quando $M = \mathbb{R}^n$, em um artigo clássico entitulado *"On the eigenvalues of vibrating membranes"* [1], G. Pólya provou que sob certas hipóteses impostas em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, vale que:

$$\lambda_k \geq \frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}$$

e conjecturou que o mesmo valeria retirando-se a parte "sob certas hipóteses". Explicitamente:

Conjectura de Pólya. *Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, então o autovalor λ_k do problema da membrana vibrante satisfaz*

$$\lambda_k \geq \frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}$$

Li e Yau atacaram a conjectura de Pólya e conseguiram provar [2], em 1983, a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geq \frac{n}{n+2} \frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}}.$$

Como $\lambda_k \geq \lambda_i$ para $i \leq k$, a equação acima nos dá que:

$$\lambda_k \geq \frac{n}{n+2}\frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}k^{\frac{2}{n}}$$

que, a menos do fator $\frac{n}{n+2}$, nos dá a conjectura de Pólya.

O nosso objetivo é estudar um análogo da desigualdade de Li e Yau para o problema do autovalor de Dirichlet em um domínio limitado de uma variedade riemanniana completa obtido por Cheng e Yang [3]. Isso é feito no capítulo 2. No capítulo anterior, fazemos um apanhado de idéias e conceitos que julgamos necessários para uma compreensão decente do que é feito na seqüência.

Ainda, estudamos estimativas para autovalores do problema da membrana vibrante quando M é o espaço hiperbólico $H^n(-1)$ de curvatura seccional constante -1.

Quando $M = \mathbb{R}^n$, vários matemáticos contruibuíram para o tema, principalmente Payne, Pólya e Weinberger, Hile e Protter e Yang. Em particular, Yang, em 1991 [4], provou que

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i).$$

Essa desigualdade ficou conhecida na literatura como "Desigualdade de Yang".

Quando este problema é olhado na esfera, ou seja, quando $M = S^n(1)$, vale a seguinte "Desigualdade de Yang" provada por Cheng e Yang:

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i + \frac{n^2}{4}).(\lambda_{k+1}-\lambda_i).$$

O nosso outro propósito é estudar uma Desigualdade de Yang para o espaço hiperbólico $H^n(-1)$. Isso é feito no capítulo 3 seguindo [3].

1 Contextualização

1.1 Introdução

Antes de introduzir as noções necessárias, é preciso dizer que, nessa primeira parte, não é minha intenção definir/enunciar de uma maneira regrada como em um *textbook*, mas sim fazer uma excursão (pretensiosamente) prazerosa e sucinta sobre noções de geometria riemanniana e teoria espectral. Nesse sentido, serão permitidas paradas e conversões possivelmente bruscas. Um alerta: a palavra *conveniente*, às vezes, será usada para evitar entrar em pormenores. Detalhes podem ser encontrados em [5] e [6].

1.2 Noções Preliminares

Durante todo este trabalho, denotaremos por M uma variedade riemanniana n-dimensional, C^∞, conexa e com métrica riemanniana $\langle .,. \rangle$ e não lembraremos mais esse fato. Caso necessário, outras hipóteses sobre M serão impostas.

Para cada $p \in M$, faz sentido falar no espaço tangente a M em p que denotaremos por M_p. Como não poderia deixar de ser, $TM = \bigcup\limits_{p \in M} M_p$ representa o fibrado tangente.

Dada uma função f definida numa vizinhança do nosso ponto $p \in M$, para cada vetor $\xi \in M_p$ faz sentido falar na *derivada direcional da função f no ponto p na direção do vetor ξ* definida, em símbolos matemáticos, como segue:

$$\xi \quad \mapsto \quad df_p(\xi) = (f \circ \omega)'(0),$$

com $\omega : I \subset \mathbb{R} \to M$ um caminho em M tal que

$$\begin{aligned} \omega(0) &= p, \\ \omega'(0) &= \xi. \end{aligned}$$

Note que, para $\xi, \eta \in M_p$ e para ω caminho satisfazendo as condições $\omega(0) = p$, $\omega'(0) = \eta + \xi$, vale

$$df_p(\eta + \xi) \quad = \quad df_p(\eta) + df_p(\xi).$$

Em palavras, o mapa acima definido é linear em cada M_p. Ademais, vale ressaltar que a derivada direcional de funções definidas em variedades tem o comportamento esperado em relação à soma e ao produto, isto é,

$$d(f+h)_p(\eta) = df_p(\eta) + dh_p(\eta),$$

$$d(fh)_p(\eta) = f \cdot dh_p(\eta) + h \cdot df_p(\eta).$$

A noção de derivada direcional de um função f na direção de um vetor ξ e sua linearidade nos permitem definir um campo de vetores em M, denotado por ∇f e denominado *gradiente de f*, da seguinte maneira: ele é o campo de vetores, que para $\xi \in TM$, satisfaz

$$\langle \nabla f, \xi \rangle_p \quad = \quad df_p(\xi)$$

e, para funções f, h definidas em M, temos

$$\nabla(f+h) = \nabla f + \nabla h,$$

$$\nabla(fh) = f\nabla h + h\nabla f.$$

O gradiente é a generalização natural que tem-se para diferenciar funções em variedades M com dimensão $n \geq 1$ e o que foi dito acima é que a estrutura riemanniana de M determina essa diferenciação de funções de maneira boa.

Agora gostaríamos de poder diferenciar campos de vetores e, para tal, dado um campo de vetores X em M e $\xi \in M_p$, podemos definir a seguinte regra:

$$(\operatorname{div} X)(p) \quad \mapsto \quad \operatorname{tr}(\xi \mapsto \nabla_\xi X).$$

A regra acima é genuinamente uma função e é chamada de "*a divergência do campo X*" ou, resumidamente, "*o divergente de X*". Bem entendido, o símbolo $\nabla_\xi X$ representa a derivada covariante de X em ξ.

Talvez possamos comentar um pouco mais sobre isso: uma *conexão* é uma regra como segue:

$$(p, \xi, X) \quad \mapsto \quad \nabla_\xi X \in M_p.$$

que para cada $p \in M$, $\xi \in M_p$ e X campo de vetores definido num aberto em torno do ponto p, associa um vetor $\nabla_\xi X \in M_p$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\nabla_\xi(X+Y) \quad = \quad \nabla_\xi X + \nabla_\xi Y \quad \text{e} \qquad \nabla_\xi(fX) \quad = \quad f(p)\nabla_\xi X + df_p(\xi)X(p)$$

Nesse sentido, o símbolo $\nabla_\xi X$ é chamado a *derivada covariante do campo X com respeito ao vetor* ξ.

Pelo Teorema de Levi-Civita, sabemos que existe uma única conexão simétrica e compatível com a métrica riemanniana de M e, por esse motivo, ela é dita a *conexão de Levi-Civita da variedade.*

Grosso modo, enquanto diferenciar funções definidas em variedades é uma atitude determinada naturalmente pela estrutura diferenciável de M, diferenciar campos não o é, mas depende da escolha de uma conexão simétrica.

Com o que foi visto até este ponto, podemos introduzir uma noção que terá papel central neste trabalho.

Definição 1. *Dada uma função* $f \in C^k(M), k \geq 2$, *definimos o seu laplaciano por*

$$\Delta f \quad = \quad \operatorname{div}(\nabla f)$$

Para uso no capítulo 3, lembramos a fórmula do laplaciano em coordenadas locais. Para tal, fixemos a seguinte notação. Seja U um aberto de M e $x : U \to \mathbb{R}^n$ uma carta, *c'est-à-dire* um difeomorfismo de U em $\mathbb{R}^n$. Associados a essa carta, temos n campos de vetores coordenados, escritos classicamente por $\frac{\partial}{\partial x_j}$, mas aqui denotados - por uma questão de simplicidade - ∂_j. Dado $p \in U$ e uma função diferenciàvel definida numa vizinhança de tal ponto, temos

$$(\partial_j(p))f = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^j}(x(p))$$

. Além disso, os vetores

$$\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$$

geram o espaço tangente M_p associado. Para a métrica riemanniana $\langle ., . \rangle$, definimos

$$g_{jk} \quad = \quad \langle \partial_j, \partial_k \rangle.$$

Ainda

$$G = (g_{jk}), \qquad g = \det G, \qquad G^{-1} = (g^{jk}).$$

Nessas notações, o *laplaciano de* f escreve-se em coordenadas locais como

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k} \partial_j (g^{jk} \sqrt{g} \partial_k f).$$

A noção de conexão nos permite falar também no operador curvatura. Para tal, representaremos com o símbolo $\mathfrak{X}$(M) o conjunto de campos de vetores diferenciáveis em M.

Daí, a *curvatura de uma variedade riemanniana* M - que denotaremos por R - é definida da seguinte maneira: dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, considera o mapa $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$R(X, Y)(Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

Quando $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica usual, temos que $R(X, Y)(Z) = 0$ para qualquer trinca nos argumentos de R e, nesse sentido, a curvatura de uma variedade riemanniana M pode ser entendida como o quanto M deixa de ser euclideana.

Na verdade, toda variedade riemanniana pode ser isometricamente imersa em algum espaço euclideano como veremos adiante.

A existência de uma imersão isométrica entre duas variedades riemannianas permite relacionar a geometria delas da maneira que passamos a expor. Seja pois $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão entre variedades de dimensões n e $n + m$ respectivamente. Assim, para cada $p \in M$, temos a seguinte decomposição

$$\overline{M}_p = M_p \oplus M_p^{\perp},$$

bem entendido, o símbolo $M_p^{\perp}$ representa o complemento ortogonal de M_p em $\overline{M}_p$.

Para $X, Y \in \mathfrak{X}_{loc}(M)$, denotaremos por $\overline{X}, \overline{Y}$ suas extensões locais a $\overline{M}$. A conexão $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$ nos permite definir uma conexão

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$$

que é a conexão de M pelo teorema de Levi-Civita. Como mencionamos, nosso objetivo momentâneo é entender a relação entre as geometrias de M e $\overline{M}$ segundo a imersão f. Essa relação é dada pela aclamada *segunda forma fundamental* que passamos a definir. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}_{loc}(M)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}_{loc}(M) \times \mathfrak{X}_{loc}(M) \to \mathfrak{X}_{loc}(M)^{\perp}$ dada por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Não é difícil concluir que o mapa acima definido é bilinear e simétrico uma vez que a conexão o é. Assim, para $p \in M$ e $v \in M_p^{\perp}$, faz sentido falar na função $H_v : M_p \times M_p \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_v(\mu, \nu) = \langle B(\mu, \nu), v \rangle$$

que pelo parágrafo imediatamente anterior é bilinear e simétrica. Isso nos permite definir uma forma quadrática que tem papel central no estudo da Geometria Diferencial.

Definição 2. *A forma quadrática* $\mathfrak{II}_v : M_p \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\mathfrak{II}_v(\xi) = H_v(\xi, \xi)$$

é chamada de a segunda forma fundamental da imersão f *em* p *segundo o vetor* v*.*

Como sabemos da Álgebra Linear, a toda forma quadrática em M_p fica associado um operador auto-adjunto em M_p que denotaremos por S_v

$$\langle S_v(\mu), \nu \rangle = H_v(\mu, \nu)$$

cujas entradas da matriz associada são os pontos extremos da forma quadrática na esfera unitária.

As idéias acima introduzidas permitem falar na noção de *curvatura média da imersão* f. Para tal, é conveniente introduzir a seguinte notação. Dado $p \in M$, como havíamos comentado, faz sentido falar na decomposição

$$\overline{M}_p = M_p \oplus M_p^{\perp}$$

e, numa vizinhança conveniente de p, podemos tomar um referencial ortonormal $\{v_1, \ldots, v_m\}$ em $\mathfrak{X}_{loc}(M)^{\perp}$ e escrever portanto

$$B(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{m} H_{v_i}(\mu, \nu) v_i.$$

O vetor

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (\operatorname{tr} S_{v_i}) v_i$$

não depende do referencial e isso permite chamá-lo de *o vetor curvatura média da imersão* f.

Agora, lembre-se que o nosso objetivo final é demonstrar uma cota inferior para o k-ésimo autovalor para o problema da membrana vibrante. Para isso, vamos fazer alguns comentários a respeito disso e fixar notação.

Como deveria ser, $\mathfrak{L}^2(M)$ representará o espaço das funções mensuráveis definidas em M para as quais a integral do quadrado é finita, em símbolos,

$$\mathfrak{L}^2(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_M |f|^2 dV < +\infty\}.$$

Se munirmos $\mathfrak{L}^2(M)$ com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_M fg \; dV,$$

então ele será um Espaço de Hilbert. O nosso primeiro objetivo é comentar alguns fatos sobre o problema da membrana vibrante. Lembre!

Problema da Membrana Vibrante. *Dada uma variedade riemanniana M compacta, encontrar todos os números reais λ para os quais o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

admite solução não-trivial $u \in C^2(M)$.

Os números desejados são chamados *autovalores do Laplaciano.* Além disso, para cada autovalor dado, o espaço vetorial formado pelas soluções do problema acima é chamado de *autoespaço* e cujos elementos não-nulos recebem o nome de *autofunções.*

Proposição 1. *O conjunto de autovalores do operador $-\Delta$ é uma sequência*

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \uparrow +\infty$$

e cada autoespaço associado tem dimensão finita. Além disso, autoespaços associados a autovalores distintos são ortogonais segundo o produto interno de $\mathfrak{L}^2(M)$ que, por sua vez, é a soma direta de todos os autoespaços. Por fim, todas as autofunções são elementos de $C^\infty(\overline{M})$.

Observe que se uma autofunção u pertence a $C^2(M) \cap C^1(\overline{M})$, então o respectivo autovalor é positivo. Para tal, lembremos alguns resultados clássicos.

Teorema da Divergência. *Seja X um campo de vetores C^1 com suporte compacto em M. Então*

$$\int_M (\operatorname{div} X)\, dV = 0.$$

Tomando $X = v(\nabla u)$ no *Teorema da Divergência* e lembrando que

$$\operatorname{div} v(\nabla u) = v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle,$$

temos a famosa

Primeira Identidade de Green. *Sejam $v \in C^1(M)$ e $u \in C^2(M)$ funções tais que $v(\nabla u)$ tem suporte compacto. Então*

$$\int_M v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle \, dV = 0.$$

Como a *Primeira Identidade de Green* é simétrica nas funções do integrando, temos mais uma equação que merece destaque:

Segunda Identidade de Green. *Se $u, v \in C^2(M)$ têm suporte compacto, então*

$$\int_M v\Delta u - u\Delta v \; dV = 0.$$

Agora podemos provar o que tínhamos observado anteriormente: o autovalor de uma autofunção do problema da membrana vibrante é positivo. Com efeito, se $u \in C^2(M)$ é uma tal autofunção com λ respectivo autovalor, segue da *Primeira Identidade de Green* que:

$$-\lambda \int_M u^2 \; dV = \int_M u\Delta u \; dV = -\int_M \langle \nabla u, \nabla u \rangle \; dV,$$

e daí, para $u \not\equiv 0$,

$$\lambda = \frac{\int_M |\nabla u|^2 \; dV}{\int_M u^2 \; dV} \geq 0.$$

Se $\lambda = 0$, a equação acima nos dá que u é constante e, como $u = 0$ em $\partial\Omega$, temos $u \equiv 0$. Isso prova o afirmado.

Um olhar atento às Identidades de Green nos dá não apenas a positividade do primeiro autovalor, mas também a ortogonalidade de autoespaços distintos. Com efeito, sejam u, v autofunções com autovelores μ, ν respectivamente. Segue da *Segunda Identidade de Green* que

$$0 = \int_M v\Delta u - u\Delta v \; dV = (\nu - \mu) \int_M uv \; dV.$$

Diremos *multiplicidade do autovalor* para nos referir à dimensão de cada autoespaço. Nesse sentido, escrevemos a lista de autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \uparrow +\infty$$

com cada autovalor repetido de acordo com a sua multiplicidade. O próximo resultado é famoso e tem papel fundamental nesse trabalho (cf. [6], pg. 9 e [7]).

Fórmula Assintótica de Weyl. *Seja $N(\lambda)$ o número de autovalores do problema da membrana vibrante, contados com multiplicidade, $\leq \lambda$. Então*

$$N(\lambda) \sim \frac{\omega_n |\Omega| \lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}.$$

Nesse ponto, seguindo a citação de É. Ghys no começo deste trabalho, nos permitiremos fazer um relato histórico que pode ser encontrado num lindo artigo de Kac [8]. Imaginemos por ora que M é uma membrana homogênea vibrante de $\mathbb{R}^2$ com sua fronteira Γ mantida fixa. Assim, seu deslocamento transversal

$$v(x, y; t) = v(\vec{\rho}, t)$$

satisfaz a célebre *equação da onda*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \Delta v$$

na qual c é uma constante que depende das propriedades físicas da membrana e da tensão imposta sob ela. De especial interesse (tanto para músicos, quanto para matemáticos), são as soluções da forma

$$v(\vec{\rho}, t) = U(\vec{\rho}) e^{i\omega t}$$

pois, sendo harmônicas no tempo, elas representam as freqüências naturais que uma membrana é capaz de produzir. Essas soluções especiais são também chamadas de *modos normais*.

Para encontrar os modos normais, substituímos $U(\vec{\rho})e^{i\omega t}$ na equação da onda e, tomando $c^2 = \frac{1}{2}$, temos que

$$\frac{1}{2}\nabla^2 U + \omega^2 U = 0,$$

com a condição $U = 0$ em Γ correspondendo ao fato da membrana estar fixada na fronteira. Mostrar que uma mebrana é capaz de produzir um espectro discreto de freqüências naturais, i.e., uma sequência de ω's $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots$ para os quais existem soluções não-triviais da equação acima foi um dos grandes problemas em Física-Matemática no século 19. Poincaré e alguns outros matemáticos quebraram suas cabeças com ele.

Agora, a situação que motiva o nome do problema é a seguinte: imaginemos que M_1 e M_2 são duas regiões limitadas, respectivamente, pelas curvas Γ_1 e Γ_2 e consideremos os problemas

$$\frac{1}{2}\nabla^2 U + \lambda U = 0, \quad \text{em } M_1 \qquad\qquad \frac{1}{2}\nabla^2 U + \lambda U = 0, \quad \text{em } M_2$$

$$U = 0, \quad \text{em } \Gamma_1 \qquad\qquad U = 0, \quad \text{em } \Gamma_2$$

Suponhamos que, para cada n, o autovalor λ_n da membrana M_1 é igual ao autovalor μ_n da membrana M_2.

Questão. *As regiões são euclideanamente congruentes?*

Ou, nas palavras de Lipman Bers, *if you had perfect pitch, could you find the shape of a drum?*.

O primeiro resultado pertinente é que podemos "escutar" a área da membrana M. Este é um resultado antigo com uma história que merece breve relato.

Ao final de outubro de 1910, o físico H. A. Lorentz[1] foi convidado a Göttingen onde deu cinco aulas entituladas *Old and New Problems of Physics*[2]. Ao final da quarta aula, ele falou como segue (em tradução livre do original para o inglês):

"In conclusion there is a mathematical problem which perhaps will arouse the interest of mathematicians who are present. It originates in the radiation theory of Jeans[3]*. In an enclosure with a perfectly reflecting surface there can form standing electromagnetic waves analogous to tones of an organ pipe. (...) It is here that there arise the mathematical problem: to prove that the number of sufficiently high overtones which lies between ν and $\nu + d\nu$ is independent of the shape of the enclosure and is simply proportional to its volume. For many simple shapes for which calculations can be carried out, this theorem has been verified (...). There is no doubt that it holds in general even for multiply connected regions. Similar theorems for other vibrating structures like membranes, air masses, etc. should also hold"*

Expressando essa conjectura de Lorentz em termos da nossa membrana, temos:

$$N(\lambda) \sim \frac{|M|}{2\pi}\lambda.$$

Existe um relato apócrifo que Hilbert teria então previsto que o teorema não seria provado em seu tempo de vida. Acontece que, menos de dois anos após a passagem de Lorentz por Göttingen, Hermann Weyl - que estava presente nas aulas de Lorentz - provou o resultado.

[1] Hendrik Antoon Lorentz, Prêmio Nobel em Física (1902)
[2] Alte und neue Fragen der Physik
[3] Sir James Hopwood Jeans

2 Conjectura de Pólya para Variedades Riemannianas Completas

2.1 Introdução

Nesta parte, demonstramos o seguinte resultado devido a Cheng e Yang [3]:

Teorema. *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade riemanniana completa n-dimensional M. Então existe uma constante H_0^2 - que depende apenas de M e de Ω - tal que os autovalores λ_i do problema da membrana vibrante satisfazem*

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{n^2}{4}H_0^2 \geq \frac{n}{\sqrt{(n+2)(n+4)}}\frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}k^{\frac{2}{n}},\ \forall k \geq 1.$$

Para tal, é fundamental destacarmos alguns resultados. Por fim, chegamos a uma extensão para variedades riemannianas completas enunciada por Cheng e Yang em [3].

2.2 Cotas Inferiores para Autovalores

Começamos esta seção apresentando uma fórmula de recorrência para números reais positivos provada por Cheng e Yang [9].

Fórmula de Recorrência de Cheng-Yang. *Sejam $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_{k+1}$ números reais tais que*

$$\sum_{i=1}^{k}(\mu_{k+1}-\mu_i)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\mu_{k+1}-\mu_i). \tag{2.1}$$

Defina

$$G_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i, \qquad T_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i^2, \qquad F_k = \left(1+\frac{2}{n}\right)G_k^2 - T_k.$$

Então

$$F_{k+1} \leq C(n,k)\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{4}{n}}F_k, \tag{2.2}$$

para todo $n > 0$, e

$$C(n,k) = 1 - \tfrac{1}{3n}\left(\tfrac{k+1}{k}\right)^{\frac{4}{n}} \tfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}{(k+1)^3} < 1.$$

Demonstração. Escrevendo

$$p_{k+1} = G_{k+1} - \left(1 + \frac{2}{n}\frac{1}{1+k}\right) G_k$$

e notando que

$$\lambda_{k+1} = (k+1)G_{k+1} - kG_k = (k+1)\left[p_{k+1} + \left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{1}{k+1}G_k\right], \tag{2.3}$$

temos

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 G_{k+1} - \frac{k}{k+1}\left(1+\frac{2}{n}\right)G_k^2 - \frac{1}{k+1}\lambda_{k+1}^2 + \frac{k}{k+1}F_k \\ &= \left(1+\frac{2}{t}\right)\left[p_{k+1} + \left(1+\frac{2}{t}\frac{1}{1+k}\right)G_k\right]^2 - \frac{k}{k+1}\left(1+\frac{2}{t}\right)G_k^2 - \\ &- (k+1)\left[p_{k+1} + \left(1+\frac{2}{t}\right)\frac{1}{k+1}G_k\right]^2 + \frac{k}{k+1}F_k. \end{aligned}$$

Como conseqüência, obtemos

$$F_{k+1} = -\left(k - \frac{2}{n}\right)p_{k+1}^2 + 2\frac{2}{n}\frac{1+\frac{2}{n}}{k+1}p_{k+1}G_k + \frac{2}{n}\frac{1+\frac{2}{n}}{k+1}G_k^2 + \frac{4}{n^2}\frac{(1+\frac{2}{n})}{(k+1)^2}G_k^2 + \frac{k}{k+1}F_k. \tag{2.4}$$

Da condição sob a qual os λ_i's estão submetidos, temos

$$\left[\lambda_{k+1} - \left(1+\frac{2}{n}\right)G_k\right]^2 \leq \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 G_k^2 - \left(1+\frac{4}{n}\right)T_k.$$

Substituindo a equação (2.1) na desigualdade acima e perseverando, obtemos

$$(k+1)^2\left[G_{k+1} - \left(1+\frac{2}{n}\frac{1}{k+1}\right)G_k\right]^2 \leq \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 G_k^2 - \left(1+\frac{4}{n}\right)T_k.$$

Logo, como $p_{k+1} = G_{k+1} - (1 + \frac{2}{n}\frac{1}{1+k})G_k$ e $F_k = (1+\frac{2}{n})G_k^2 - T_k$, segue que

$$0 \leq -(k+1)^2 p_{k+1}^2 - \frac{2}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

Multiplicando a equação acima por $[\frac{1}{k+1} + \frac{2}{n}(\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{\beta(1+\frac{2}{n})}{(k+1)^3})]$ e usando o valor de F_{k+1} encontrado em (2.2), concluímos que

$$\begin{aligned} F_{k+1} &\leq \left(1 + \frac{4}{n}\frac{1}{k+1} + \frac{2}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^2} + \frac{2\beta}{n}\frac{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^3}\right)F_k - \\ &- \left(2k+1+\frac{2}{n}\frac{(1+\frac{2}{n})\beta}{k+1}\right)p_{k+1}^2 + 2\frac{2}{n}\frac{1+\frac{2}{n}}{k+1}p_{k+1}G_k - \frac{4\beta}{n^2}\frac{(1+\frac{2}{n})^2}{(k+1)^3}G_k^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{4}{n}\frac{1}{k+1} + \frac{2}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^2} + \frac{2\beta}{n}\frac{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^3}\right)F_k - \frac{4\beta}{n^2}\frac{(1+\frac{2}{n})^2}{(k+1)^3}G_k^2 + \\ &+ \frac{4}{n^2}\frac{(1+\frac{2}{n})^2}{(k+1)^2(2k+1)}G_k^2 - (2k+1)\left(p_{k+1} - \frac{2}{n}\frac{(1+\frac{2}{n})}{(k+1)(2k+1)}G_k\right)^2. \end{aligned}$$

Fazendo $\beta = k + \frac{1}{2k} + 1$, temos

$$F_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n}\frac{1}{k+1} + \frac{2}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^2} + \frac{2}{n}\frac{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^2(2k+1)}\right) F_k.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{4}{n}} &= \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{-\frac{4}{n}} \\ &= 1 + \frac{4}{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{4}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^2} + \frac{1}{6}\frac{4}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})(2+\frac{4}{n})}{(k+1)^3} + \frac{1}{24}\frac{4}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})(2+\frac{4}{n})(3+\frac{4}{n})}{(k+1)^4} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{4}{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{4}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^2} + \frac{1}{3}\frac{4}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})(1+\frac{2}{n})}{(k+1)^3} + \frac{1}{4}\frac{4}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})(1+\frac{2}{n})}{(k+1)^4},\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}F_{k+1} &\leq \left[\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{4}{n}} - \frac{k-1}{3(2k+1)}\frac{2}{n}\frac{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^3} - \frac{1}{n}\frac{(1+\frac{4}{n})(1+\frac{2}{n})}{(k+1)^4}\right] F_k \\ &\leq C(n,k)\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{4}{n}} F_k,\end{aligned}$$

com

$$C(n,k) = \left[1 - \frac{1}{3n}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{4}{n}}\frac{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})}{(k+1)^3}\right] < 1$$

e isso encerra, em linhas gerais, a demonstração da *Fórmula de Recorrência de Cheng-Yang*.

O seguinte resultado - obtido por Cheng e Yang [10] - tem papel importante não só nesse capítulo, mas também no próximo.

Teorema CY. *Se considerarmos o problema da membrana vibrante em uma variedade riemanniana compacta n-dimensional $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, então, para qualquer função $g \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$, vale que*

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 ||u_i \nabla g||^2 \leq \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)||2\nabla g.\nabla u_i + u_i \Delta g||^2. \tag{2.5}$$

Prova do Teorema CY. Seja u_i autofunção relativa ao i-ésimo autovalor λ_i. Logo

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i u_i, \quad \text{em } \Omega \\ u_i &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega \\ \int_M u_i u_j &= \delta_{ij}. \end{cases}$$

Para $i, j \in \{1, \dots, k\}$, defina as funções a_{ij}, ϕ_i e b_{ij} como abaixo

$$\begin{cases} a_{ij} &= \int_M g u_i u_j, \\ \varphi_i &= g u_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j, \\ b_{ij} &= \int_M u_j \left(\nabla u_i \cdot \nabla g + \frac{1}{2} u_i \Delta g.\right) \end{cases}$$

É claro que

$$a_{ij} = a_{ji}$$

e

$$\int_M \varphi_i u_j = 0$$

Portanto

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\int_M |\nabla \varphi_i|^2}{\int_M \varphi_i^2}. \tag{2.6}$$

Da definição de a_{ij} e de aplicar duas vezes integração por partes, segue

$$\begin{aligned}
\lambda_j a_{ij} = \lambda_j \int_M g u_i u_j = \int_M g u_i(\lambda_j u_j) = \int_M (g u_i)(-\Delta u_j) \\
= \int_M (-2u_j \nabla u_i \cdot \nabla g - \Delta g u_i u_j - g u_j \Delta u_i) \\
= -2b_{ij} + \lambda_i a_{ij}.
\end{aligned}$$

Por simetria em i, j, temos

$$2b_{ij} = -2b_{ji} = (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}. \tag{2.7}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_i = \operatorname{div}(\nabla \varphi_i) = \operatorname{div}\left[\nabla(g u_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j)\right] \\
= \operatorname{div}[\nabla(g u_i)] - \operatorname{div}\left[\nabla\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j\right)\right] \\
= g\Delta u_i + 2\nabla u_i \cdot \nabla g + u_i \Delta g + \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \lambda_j u_j.
\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando a igualdade obtida agora para $\Delta \varphi_i$, temos

$$\int_M |\nabla \varphi_i|^2 = -\int_M \varphi_i(\Delta \varphi_i) = \lambda_i \int_M \varphi_i^2 - \int_M \varphi_i (2\nabla u_i \cdot \nabla g + u_i \Delta g). \tag{2.8}$$

Das equações (2.6) e (2.8), segue

$$\lambda_{k+1} \int_M \varphi_i^2 - \lambda_i \int_M \varphi_i^2 \leq -\int_M \varphi_i (2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g).$$

Em símbolos equivalentes,

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)||\varphi_i||^2 \leq -\int_M \varphi_i (2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g) \equiv \omega_i. \tag{2.9}$$

Por (2.7), pela definição de φ_i e pela definição de a_{ij}, temos

$$\omega_i = -\int_M (g u_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j)(2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g) = ||u_i \nabla g||^2 + \sum_{j=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}^2. \tag{2.10}$$

Por outro lado, lembrando que $\int_M \varphi_i u_j = 0$ e pela definição de ω_i, segue

$$\omega_i = -\int_M \varphi_i \left(2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g - 2\sum_{j=1}^{k} b_{ij} u_j \right).$$

Ainda, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\omega_i^2 \leq (\lambda_{k+1} - \lambda_i)||\varphi_i||^2 ||2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g - 2\sum_{j=1}^{k} b_{ij} u_j||^2. \tag{2.11}$$

De (2.9) e (2.11) e da definição de b_{ij}, segue

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\omega_i^2 \leq \omega_i(||2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g||^2 - 4\sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2).$$

Logo,

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\omega_i \leq ||2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g||^2 - 4\sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2. \tag{2.12}$$

Multiplicando a desigualdade acima por $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)$ e somando para $i \in \{1, \ldots, k\}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \omega_i \leq &-4\sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i) b_{ij}^2 \\ &+ \sum_{i+1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)||2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g||^2.\end{aligned}$$

Como $2b_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)a_{ij}$, a desigualdade acima escreve-se como

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \omega_i \leq &\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)||2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g||^2 \\ &- \sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_j)^2 a_{ij}^2.\end{aligned}$$

Ainda, por (2.10) e lembrando que $a_{ij} = a_{ji}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \omega_i = &\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^| |u_i \nabla g||^2 \\ &+ \sum_{i,j=1}^{k}\frac{1}{2}[(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 - (\lambda_{k+1} - \lambda_j)^2](\lambda_i - \lambda_j)a_{ij}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2||u_i \nabla g||^2 - \sum_{i,j=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_j)^2 a_{ij}^2.\end{aligned}$$

Essa última igualdade obtida para $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \omega_i$, junto com a desigualdade obtida imediatamente antes, nos permite concluir

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2||u_i \nabla g||^2 \leq \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)||2\nabla g \cdot \nabla u_i + u_i \Delta g||^2. \tag{2.13}$$

Como (2.5) = (2.13), o teorema fica provado.

Agora gostaríamos de introduzir um belo resultado [11] devido a J. F. Nash que é central na prova do teorema prometido. Ele versa sobre imersões de variedades riemannianas em espaços euclideanos.

O conceito abstrato de variedade riemanniana foi o resultado de uma evolução do pensamento matemático iniciada por C.F. Gauss e continuada por B. Riemann. Antes deles, pensava-se mais concretamente em superfícies em um espaço 3-dimensional ou em uma variedade algébrica, por exemplo. À medida que a visão mais abstrata de variedade foi sendo aceita, a seguinte pergunta surgiu: até que ponto as variedades riemannianas são uma família mais geral que subvariedades do espaço euclideano?

Em 1873 [12], Schlaefli[1] conjecturou que uma vizinhança de uma variedade n-dimensional exigiria genericamente um espaço de dimensão $(n/2)(n+1)$ para ser imersa. Hilbert, S.S. Chern e outros obtiveram alguns resultados negativos. Um n-toro flat não é realizável em dimensão menor que $2n$, por exemplo. Em 1956, Nash[2] provou essencialmente que *toda variedade riemanniana compacta de dimensão n pode ser realizada como uma subvariedade do espaço euclideano de dimensão* $(n/2)(3n+11)$. Variedades não-compactas são tratadas por Nash no mesmo artigo [11]. Nesse caso, ele as realiza em dimensão $(n/2)(n+1)(3n+11)$.

Teorema da Imersão de Nash. *Toda variedade riemanniana pode ser isometricamente imersa em algum espaço euclideano.*

Usando os resultados acima, Chen e Cheng [13] obtiveram o seguinte:

Teorema CC. *Seja Ω um domínio limitado de uma variedade riemanniana completa de dimensão n isometricamente imersa em $\mathbb{R}^N$. Se considerarmos o problema da membrana vibrante*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

então

$$\sum_{i=1}^{k}(\mu_{k+1}-\mu_i)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\mu_{k+1}-\mu_i)\mu_i,$$

com $\mu_i = \lambda_i + \frac{n^2}{4}||H||^2$.

1 Ludwig Schlaefli
2 John Forbes Nash Jr., Nobel Memorial Prize in Economic Sciences (1994), Leroy P. Steele Prize (1999) e Abel Prize (2015).

Bem entendido, no teorema acima, λ_i representa o i-ésimo autovalor e H a curvatura média da imersão. Para provar tal resultado, fixemos a seguinte convenção de índices e notação:

$$1 \leq i, j, \cdots \leq n; \quad 1 \leq \alpha, \beta, \cdots \leq N; \quad n+1 \leq A, B, \cdots \leq N.$$

Sejam $\Omega \subseteq M^n$ um domínio limitado de uma variedade riemanniana completa isometricamente imersa em $\mathbb{R}^N$ e $p \in \Omega$ um ponto qualquer. Ainda, considere um sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ em uma vizinhança U de tal ponto. Seja y - com compenentes y^α dado por

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \ldots, x^n), \qquad 1 \leq \alpha \leq N,$$

o vetor posição de p em $\mathbb{R}^N$. Como M^n está isometricamente imersa em $\mathbb{R}^N$, então

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_p = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N} \partial_i y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \sum_{\beta=1}^{N} \partial_j y^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{N} \partial_i y^\alpha \partial_j y^\alpha.$$

No ponto p, nós temos

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \langle \nabla y^\alpha, \nabla y^\alpha \rangle_p = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i y^\alpha \partial_j y^\alpha g^{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g_{ij} = n. \tag{2.14}$$

O último fato que precisamos admitir para provar o *Teorema CC* é um leminha cuja demonstração pode ser encontrada em [13]. A saber

Leminha. *Seja $u \in C^\infty(M)$. Então*

$$\sum_{\alpha=1}^{N} (\langle \nabla y^\alpha, \nabla u \rangle_p)^2 = |\nabla u|^2,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} (\Delta y^\alpha)^2 = n^2 H^2,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \Delta y^\alpha \nabla y^\alpha = 0.$$

Provaremos a primeira das equações acima. Sejam ∇' a conexão de $\mathbb{R}^N$ e $\mathfrak{II}$ a segunda forma fundamental de M^n. Escolhendo um outro sistema de coordenadas $\bar{y} = (\bar{y}^1, \cdots, \bar{y}^N)$ dado por

$$y - y(p) = \bar{y} A$$

tal que o conjunto de vetores $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}^N}\right)_p\right\}$ gera o espaço tangente a M^n em $p \in M^n$ e $A = (a^\alpha_\beta) \in \mathbb{O}(n)$ é uma matriz ortogonal. Então

$$\nabla'_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial^2 \bar{y}^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\alpha}.$$

Aplicando a fórmula de Gauss à equação acima, temos

$$\mathfrak{II}^A_{ij} = \mathfrak{II}^A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial^2 \bar{y}^A}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Bem entendido, $\mathfrak{II}^A_{ij}$ é a componente da segunda forma fundamental $\mathfrak{II}$ de M. Finalmente, sejam $u \in C^\infty(M)$ e $p \in M$ um ponto qualquer.Então

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N} (\langle \nabla y^\alpha, \nabla u \rangle_p)^2 &= \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\left\langle \nabla \left(y^\alpha(p) + \sum_{\beta}^{N} a^\alpha_\beta \bar{y}^\beta\right), \nabla u \right\rangle_p\right]^2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\left\langle \sum_{\beta=1}^{N} a^\alpha_\beta \bar{y}^\beta, \nabla u \right\rangle\right]^2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\sum_{\beta}^{N} \sum_{i}^{n} a^\alpha_\beta \frac{\partial \bar{y}^\beta}{\partial \bar{y}^i} \frac{\partial u}{\partial \bar{y}^i}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\alpha}^{N} a^\alpha_i a^\alpha_i\right) \frac{\partial u}{\partial \bar{y}^i} \frac{\partial u}{\partial \bar{y}^i} \\
&= |\nabla u|^2,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Prova do Teorema CC. Seja u_i a autofunção correspondente ao autovalor λ_i e tal que $\{u_i\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{L}^2(\Omega)$. Escreva $f^\alpha = y^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq N$. Como M^n é completa e Ω é um domínio limitado, sabemos que $\bar{\Omega}$ é uma variedade riemanniana compacta. Assim, aplicando o *Teorema CY*, temos

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 ||u_i \nabla f^\alpha||^2 \leq \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) ||2\nabla f^\alpha . \nabla u_i + u_i \Delta f^\alpha||^2.$$

Daí, somando em α, temos

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \sum_{\alpha=1}^{N} ||u_i \nabla f^\alpha||^2 \leq \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \sum_{\alpha=1}^{N} ||2\nabla f^\alpha . \nabla u_i + u_i \Delta f^\alpha||^2.$$

Daí, aplicando (2.3) e o *Leminha*, segue

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \sum_{\alpha=1}^{N} ||u_i \nabla f^\alpha||^2 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_\Omega u_i^2 \sum_{\alpha=1}^{N} |\nabla y^\alpha|^2 = n \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}^{N}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)||2\nabla y^{\alpha}.\nabla u_i+u_i\Delta y^{\alpha}||^2 &= \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_{\Omega}[4\sum_{\alpha=1}^{N}|\nabla y^{\alpha}.\nabla u_i|^2+\\ &+u_i^2\sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^{\alpha})^2+2\sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^{\alpha}\nabla y^{\alpha}).\nabla u_i^2]\leq\\ &\leq 4\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_{\Omega}|\nabla u_i|^2+n^2||H||^2\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)=\\ &=4\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i+n^2||H||^2\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i).\end{aligned}$$

Assim sendo, temos

$$n\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\leq 4\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i+n^2||H||^2\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)$$

e isso era o que queríamos demonstrar.

Agora podemos demonstrar o resultado anunciado na introdução.

Teorema. *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade riemanniana completa n-dimensional M. Então existe uma constante H_0^2 - que depende apenas de M e de Ω - tal que os autovalores λ_i's do problema da membrana vibrante satisfazem*

$$\tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\tfrac{n^2}{4}H_0^2\geq\tfrac{n}{\sqrt{(n+2)(n+4)}}\tfrac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}k^{\frac{2}{n}},\ \forall k\geq 1.$$

Prova do Teorema. Uma vez que M é uma variedade riemanniana completa, o *Teorema da Imersão de Nash* nos garante a existência de uma imersão isométrica de M em algum $\mathbb{R}^N$, em símbolos,

$$\varphi: M\to\mathbb{R}^N.$$

Seja H a curvatura média de φ. Portanto M pode ser vista como uma subvariedade completa de $\mathbb{R}^N$. Pelo *Teorema CC*, temos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\leq\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i+\frac{4}{n}||H||^2). \tag{2.15}$$

Uma vez que autovalores são invariantes por isometrias, a desigualdade acima vale para qualquer imersão isométrica de M em algum espaço euclideano. Agora considera o conjunto

$$\Phi\ =\ \{\varphi:\varphi \text{ é uma imersão isométrica de } M \text{ em um espaço euclideano}\}.$$

Escrevendo

$$H_0^2 \;=\; \inf_{\phi\in\Phi}\sup_{\Omega}|H|^2 \;,$$

a equação (2.5) nos dá que:

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i+\frac{4}{n}H_0^2). \tag{2.16}$$

Daí, se escrevermos $\mu_i = \lambda_i + \frac{n^2}{4}H_0^2$, podemos aplicar a *Fórmula de Recorrência de Cheng-Yang* e concluir que

$$F_{k+1} \leq C(n,k)\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{4}{n}} F_k \leq \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{4}{n}} F_k.$$

Logo

$$\frac{F_{k+1}}{(k+1)^{\frac{4}{n}}} \;\leq\; \frac{F_k}{k^{\frac{4}{n}}}.$$

Daí, $\forall l, k$ temos

$$\frac{F_{k+l}}{(k+l)^{\frac{4}{n}}} \leq \frac{F_k}{k^{\frac{4}{n}}}. \tag{2.17}$$

Ainda, da *Fórmula Assintótica de Weyl*, temos

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\lambda_l}{l^{\frac{2}{n}}} = \frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}. \tag{2.18}$$

Escrevendo

$$a_l = \tfrac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i, \qquad b_l = l^{\frac{2}{n}}, \qquad \text{para } l = 1,2,3,\ldots$$

Vamos estudar o limite

$$\lim_{l\to\infty}\frac{a_l}{b_l}.$$

Como (b_l) é estritamente monótona e divergente, vamos calcular o limite dos quocientes e aplicar o *Teorema de Stolz-Cesàro* [14], [15]. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty}\frac{\lambda_l}{(l+1)^{1+2/n}-l^{1+2/n}} &= \lim_{l\to\infty}\frac{\lambda_l}{l^{2/n}}\lim_{l\to\infty}\frac{l^{2/n}}{(l+1)^{1+2/n}-l^{1+2/n}}\\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{\lambda_l}{l^{2/n}}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{(l+1)(1+1/l)^{2/n}-l}\\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{\lambda_l}{l^{2/n}}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{1+\binom{2/n}{1}}\\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{\lambda_l}{l^{2/n}}\frac{n}{n+2}.
\end{aligned}$$

Como o limite (2.8) existe, segue que

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i}{l^{\frac{2}{n}}} = \frac{n}{n+2}\frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}.$$

Um raciocínio análogo nos dá

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^2}{l^{\frac{4}{n}}} = \frac{n}{n+4}\frac{16\pi^4}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{4}{n}}}.$$

Lembrando que:

$$F_k = (1+2/t)G_k^2 - T_k, \qquad\qquad \mu_i = \lambda_i + \tfrac{n^2}{4}||H||^2$$

Temos:

$$\lim_{l\to\infty} \frac{F_{k+l}}{(k+l)^{\frac{4}{n}}} = \frac{2n}{(n+2)(n+4)}\frac{16\pi^4}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{4}{n}}}.$$

De acordo com a equação (2.3), para todo inteiro positivo k

$$\frac{F_k}{k^{\frac{4}{n}}} \geq \frac{2n}{(n+2)(n+4)}\frac{16\pi^4}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{4}{n}}}.$$

Uma vez que

$$F_k = \left(1+\frac{2}{n}\right)G_k^2 - T_k = \frac{2}{n}G_k^2 - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\mu_i - G_k)^2 \leq \frac{2}{n}G_k^2,$$

segue

$$\frac{2}{n}\frac{G_k^2}{k^{\frac{4}{n}}} \geq \frac{F_k}{k^{\frac{4}{n}}} \geq \frac{2n}{(n+2)(n+4)}\frac{16\pi^4}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{4}{n}}}.$$

Ou seja, da definição de μ_i, nós provamos que

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{n^2}{4}H_0^2 \leq \frac{n}{\sqrt{(n+2)(n+4)}}\frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}},$$

que era o prometido.

Como corolário, temos:

Corolário 1. *Seja Ω um domínio da esfera unitária $\mathbb{S}^n$. Então os autovalores do problema da membrana vibrante satisfazem*

$$\tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \tfrac{n^2}{4} \geq \tfrac{n}{\sqrt{(n+2)(n+4)}}\tfrac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}k^{\frac{2}{n}},\ \forall k\geq 1.$$

Corolário 2. *Seja Ω um domínio de uma subvariedade mínima completa M em $\mathbb{R}^N$. Então os autovalores do problema da membrana vibrante satisfazem*

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \geq \frac{n}{\sqrt{(n+2)(n+4)}}\frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}k^{\frac{2}{n}},\ \forall k \geq 1.$$

Baseados nesses resultados, Cheng e Yang propuseram uma generalização natural da Conjectura de Pólya para variedades riemannianas completas conforme [3]. É ela:

A Conjectura de Pólya Generalizada. *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade riemanniana completa M. Então existe uma constante $c(M,\Omega)$ tal que os autovalores λ_i's do problema da membrana vibrante satisfazem*

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + c(M,\Omega) \geq \frac{n}{n+2}\frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}k^{\frac{2}{n}}$$

e

$$\lambda_k + c(M,\Omega) \geq \frac{4\pi^2}{(\omega_n|\Omega|)^{\frac{2}{n}}}k^{\frac{2}{n}}.$$

3 Estimativas para autovalores no Espaço Hiperbólico

3.1 Introdução

Pretendemos estudar os autovalores do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

para um domínio limitado de $\mathbb{H}^n(-1)$. Quando $n = 2$, a semelhança entre o laplaciano em $\mathbb{H}^2(-1)$ e em $\mathbb{R}^n$ permite obter vários resultados concernindo os autovalores. Quando $n > 2$, essa semelhança é deturpada[1] e dificulta a análise usando as mesmas ferramentas.

O nosso propósito nessa seção é driblar esse impedimento e, como conseqüência, encontrar uma Desigualdade de Yang para esse caso seguindo os passos de Cheng e Yang [3]. Mais precisamente, pretendemos provar o seguinte resultado

Teorema. Desigualdade de Yang. *Se $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n(-1)$ é um domínio limitado, então os autovalores do problema da membrana vibrante em Ω satisfazem*

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \frac{(n-1)^2}{4} \right) (\lambda_{k+1} - \lambda_i).$$

Com esse teorema em mãos, Cheng e Yang extraem um corolário interessante [3] acerca do estudo dos autovalores em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{H}^n(-1)$ à medida que $\Omega \to \mathbb{H}^n(-1)$. Bem entendido, o símbolo

$$\Omega \to \mathbb{H}^n(-1)$$

significa

$$\Omega \text{ contém uma bola de raio } r \text{ e } r \to \infty.$$

3.2 O Espaço Hiperbólico em 1 página

Consideramos o conjunto $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

com a métrica riemanniana

$$(ds)^2 = \frac{(dx_1)^2 + \ldots (dx_n)^2}{(x_n)^2} = \frac{\delta_{ij}}{(x_n)^2}.$$

[1] Faremos mais comentários na próxima seção.

Nessas condições, $\mathbb{H}^n$ é um espaço com curvatura seccional constante igual a -1 e é completo. A notação para tal espaço é $\mathbb{H}^n(-1)$. Valendo-nos da fórmula para o laplaciano em coordenadas locais comentada no capítulo 1, temos o seguinte

$$\Delta f = (x_n)^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j} \partial_{x_j}} + (2-n) x_n \frac{\partial f}{\partial_{x_n}}. \tag{3.1}$$

Observe que, para $n = 2$, a equação acima nos dá

$$\Delta f = y^2 f_{xx} + y^2 f_{yy}$$

que, a menos de um peso, é o laplaciano em $\mathbb{R}^2$. Isso explica os comentários feitos na introdução deste capítulo.

3.3 Prova da Desigualdade de Yang para $\mathbb{H}^n(-1)$.

Seja u_i a autofunção correspondente ao autovalor λ_i e tal que $\{u_i\}$ é base ortonormal de $\mathfrak{L}^2(\Omega)$. Escreva $f = \log x_n$. Uma vez que $H^n(-1)$ é completa e Ω é um domínio limitado, segue que $\bar{\Omega}$ é uma variedade riemanniana compacta com bordo. Assim, pelo *Teorema CY*, temos

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 ||u_i \nabla f||^2 \leq \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) ||2\nabla f.\nabla u_i + u_i \Delta f||.$$

Como $\Delta f = 1 - n$ e $|\nabla f|^2 = 1$, temos

$$||u_i \nabla f||^2 = 1$$

e

$$\begin{aligned} ||2\nabla f.\nabla u_i + u_i \Delta f||^2 &= 4 \int_\Omega (\nabla f.\nabla u_i)^2 + 4 \int_\Omega \nabla f.\nabla u_i (u_i \Delta f) + \int_\Omega (u_i \Delta f)^2 \\ &= 4 \int_\Omega (\nabla f.\nabla u_i)^2 + 4(1-n) \int_\Omega u_i \nabla f.\nabla u_i + (n-1)^2. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_\Omega u_i \nabla f.\nabla u_i = - \int_\Omega u_i \nabla f.\nabla u_i - \int_\Omega (u_i)^2 \Delta f,$$

temos

$$\int_\Omega u_i \nabla f.\nabla u_i = \frac{n-1}{2}.$$

Da *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, segue

$$(\nabla f.\nabla u_i)^2 \leq |\nabla f|^2 |\nabla u_i|^2 = |\nabla u_i|^2.$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq 4\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_i - \frac{(n-1)^2}{4}).$$

A fórmula acima é a *Desigualdade de Yang* para um domínio limitado de $H^n(-1)$ prometida.

Esse teorema permite estudar o comportamento dos autovalores $\lambda_k(\Omega)$, para k fixo, à medida que $\Omega \to \mathbb{H}^n(-1)$. Em 1970 [16], McKean provou que para Ω o disco de dimensão n e raio r em $\mathbb{H}^n(-1)$, o primeiro autovalor do problema da membrana vibrante, $\lambda_1(r)$, satisfaz

$$\lambda_1(r) \geq \tfrac{(n-1)^2}{4},$$

$$\lim_{r\to\infty} \lambda_1(r) = \tfrac{(n-1)^2}{4}.$$

Como os autovalores são monótonos em relação aos domínios de definição do problema da membrana vibrante, temos para um domínio Ω em $\mathbb{H}^n(-1)$

$$\lambda_1(\Omega) \geq \tfrac{(n-1)^2}{4},$$

$$\lim_{r\to\infty} \lambda_1(\Omega) = \tfrac{(n-1)^2}{4}.$$

Assim, para $k > 1$, temos

$$\lambda_k(\Omega) > \lambda_1(\Omega) \geq \tfrac{(n-1)^2}{4},$$

Nesse sentido, Cheng e Yang [3], como corolário do teorema anterior, obtiveram o seguinte resultado

Corolário. *Seja Ω domínio limitado de $\mathbb{H}^n(-1)$. Então o autovalor $\lambda_k(\Omega)$ do problema da membrana vibrante satisfaz*

$$\lim_{\Omega\to\mathbb{H}^n(-1)} \lambda_k(\Omega) = \frac{(n-1)^2}{4}$$

Prova. Escrevendo $\mu_i = \lambda_i - \frac{(n-1)^2}{4}$, temos pela *Desigualdade de Yang*

$$\sum_{i=1}^{k}(\mu_{k+1}-\mu_i)^2 \leq 4\sum_{i=1}^{k}(\mu_{k+1}-\mu_i)\left(\mu_i - \frac{(n-1)^2}{4}\right).$$

Ou seja, estamos nas hipóteses da *Fórmula de Recorrência de Cheng-Yang* precisamente para $n = 1$ (eq. (2.1)). Assim, a fórmula de recursão (2.2) nos permite concluir que

$$\mu_{k+1} \leq 5k^2\mu_1$$

Fixando k, tomando o limite $\Omega \to \mathbb{H}^n(-1)$ na expressão acima e lembrando que $\mu_1 \to 0$, temos

$$\lim_{\Omega \to \mathbb{H}^n(-1)} \mu_{k+1} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{\Omega \to \mathbb{H}^n(-1)} \lambda_{k+1} = \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Referências

1 PóLYA, G. On the eigenvalues of vibrating membranes†. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, s3-11, n. 1, p. 419–433, 1961. ISSN 1460-244X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1112/plms/s3-11.1.419>. Citado na página 9.

2 LI, P.; YAU, S. T. On the schrödinger equation and the eigenvalue problem. *Comm. Math. Phys.*, Springer, v. 88, n. 3, p. 309–318, 1983. Disponível em: <https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1103922378>. Citado na página 9.

3 CHENG, Q.-M.; YANG., H. Estimates for eigenvalues on riemannian manifolds. *Journal of Differential Equations*, v. 247, p. 2270–2281, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.07.015>. Citado 5 vezes nas páginas 10, 20, 31, 32 e 34.

4 YANG., H. An estimate of the difference between consecutive eigenvalues. *Preprint IC/91/60 of ICTP, Trieste*, IC–91/60, 1991. Citado na página 10.

5 CARMO., M. P. do. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2015. Citado na página 11.

6 CHAVEL., I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Florida, USA: Academic Press, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 17.

7 WEYL., H. Das asymptotische verteilungsgesetz der eigenwerte linearer partieller differentialgleichungen (mit einer anwendung auf die theorie der hohlraumstrahlung). *Mathematische Annalen*, v. 71, p. 441–479, 1912. Disponível em: <https://eudml.org/doc/158545>. Citado na página 17.

8 KAC, M. Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, v. 73, n. 4, p. 1–23, 1966. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2313748>. Citado na página 17.

9 CHENG, Q.-M.; YANG., H. Bounds on eigenvalues of dirichlet laplacian. *Mathematische Annalen*, Springer-Verlag, v. 337, p. 159–175, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00208-006-0030-x>. Citado na página 20.

10 CHENG, Q.-M.; YANG., H. Inequalities for eigenvalues of laplacian on domains and compact complex hypersurfaces in complex projective spaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, v. 58, n. 2, p. 545–561, 2006. Disponível em: <http://doi.org/10.2969/jmsj/1149166788>. Citado na página 22.

11 NASH., J. The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, v. 63, n. 1, p. 20–63, 1956. ISSN 0003486X. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1969989>. Citado na página 25.

12 SCHLAEFLI., L. Nota alla memoria del sig. beltrami, « sugli spazii di curvatura costante ». *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897)*, v. 5, n. 1, p. 178–193, 1871. ISSN 0373-3114. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02419733>. Citado na página 25.

13 CHEN, D.; CHENG., Q.-M. Extrinsic estimates for eigenvalues of the laplace operator. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, v. 60, n. 2, p. 325–339, 2008. Disponível em: <http://doi.org/10.2969/jmsj/06020325>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

14 STOLZ, O. *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: nach den Neueren Ansichten*. Leipzig, Alemanha: Teubners, 1885. Citado na página 29.

15 CESàRO, E. Sur la convergence des séries. *Nouvelles Annales de Mathématiques.*, Springer, v. 7, n. 3, p. 49–59, 1888. Disponível em: <http://www.numdam.org/article-/NAM_1888_3_7__49_1.pdf>. Citado na página 29.

16 MCKEAN., H. P. An upper bound to the spectrum of δ on a manifold of negative curvature. *Journal of Differential Geometry*, v. 4, n. 3, p. 359–366, 1970. Disponível em: <https://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214429509>. Citado na página 34.

—